УДК 512.64

ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ-ЧЕБЫШЕВА

В.М. Адуков, О.Л. Ибряева
г. Челябинск, ЮУрГУ

Изучена задача линейной аппроксимации Паде-Чебышева. Получено достаточное условие существования, единственности и устойчивости решения этой задачи.

1. Введение

В данной работе речь пойдет о линейных аппроксимациях Паде-Чебышева, являющихся одним из обобщений классических аппроксимаций Паде. Напомним, что аппроксимацией Паде типа (n, m) называется рациональная функция, разложение в ряд Тейлора которой совпадает с разложением аппроксимируемой функции до члена порядка $n + m$ включительно. Числителем этой дроби является многочлен формальной степени n, знаменателем – многочлен формальной степени m.

Это определение естественным образом обобщается на случай функций, разлагающихся в ряд по ортогональным многочленам.

Определение 1.1. *Пусть функция $f(z)$ разложена в ряд по многочленам Чебышева $T_i(z)$*

$$f(z) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i T_i(z) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 T_1(z) + a_2 T_2(z) + \dots\ .$$

Линейной аппроксимацией Паде-Чебышева типа (n, m) функции $f(z)$ называется рациональная дробь $R_{n,m}(z) = \dfrac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)}$, где $P_{n,m}(z), Q_{n,m}(z)$ – многочлены, такие, что $\deg P_{n,m}(z) \le n$, $\deg Q_{n,m}(z) \le m$, $Q_{n,m}(z) \ne 0$ и выполняется соотношение

$$Q_{n,m}(z) f(z) - P_{n,m}(z) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} c_k T_k(z). \tag{1.1}$$

В дальнейшем мы будем опускать индексы n, m, поскольку всегда будем иметь дело с аппроксимацией Паде-Чебышева фиксированного типа (n, m).

Покажем, что задача нахождения линейных аппроксимаций Паде-Чебышева сводится к задаче о структуре ядра теплиц-плюс-ганкелевых матриц.

Производя в (1.1) умножение

$$f(z)Q(z) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i T_i(z) {\sum_{j=0}^{m}}' q_j T_j(z) = \frac{1}{2} {\sum_{i=0}^{\infty}}' {\sum_{j=0}^{m}}' a_i q_j \left[T_{|i-j|}(z) + T_{i+j}(z) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} {\sum_{i=0}^{\infty}}' \left[{\sum_{j=0}^{m}}' q_j (a_{i+j} + a_{|i-j|}) \right] T_i(z),$$

получим систему линейных уравнений для определения коэффициентов линейной аппроксимации Паде-Чебышева

$$\sum_{j=0}^{m} q_j (a_{|i-j|} + a_{i+j}) = 0, \quad i = n+1, \dots, n+m, \tag{1.2}$$

$$1/2\sum_{j=0}^{m} q_j(a_{|i-j|}+a_{i+j}) = p_i, \quad i=0,\dots,n. \tag{1.3}$$

Система однородных уравнений (1.2) позволяет определить коэффициенты знаменателя $Q(z)$ по данным коэффициентам ряда, затем уравнения (1.3) определяют коэффициенты числителя $P(z)$ по найденным коэффициентам знаменателя. Матрица системы (1.2) имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{|n+1|}+a_{n+1} & a_{|n|}+a_{n+2} & \dots & a_{|n-m+1|}+a_{n+m+1} \\ a_{|n+2|}+a_{n+2} & a_{|n+1|}+a_{n+3} & \dots & a_{|n-m+2|}+a_{n+m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{|n+m|}+a_{n+m} & a_{|n+m-1|}+a_{n+m+1} & \dots & a_{|n|}+a_{n+2m} \end{pmatrix}.$$

Так как ее размеры $m\times(m+1)$, то однородная система (1.2) всегда имеет ненулевое решение.

Замечание 1.1. *Это означает, что линейная аппроксимация Паде-Чебышева всегда существует.*

Мы будем полагать $n \geq m-1$ (это означает, что мы рассматриваем только верхнюю часть таблицы Паде-Чебышева). Тогда модули у элементов только что приведенной матрицы можно отбросить и мы получим следующую теплиц-плюс-ганкелеву матрицу

$$S_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1}+a_{n+1} & a_{n}+a_{n+2} & \dots & a_{n-m+1}+a_{n+m+1} \\ a_{n+2}+a_{n+2} & a_{n+1}+a_{n+3} & \dots & a_{n-m+2}+a_{n+m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+m}+a_{n+m} & a_{n+m-1}+a_{n+m+1} & \dots & a_{n}+a_{n+2m} \end{pmatrix}.$$

Вектор, составленный из коэффициентов q_i разложения по многочленам Чебышева знаменателя $Q(z)$, принадлежит ядру этой матрицы. (Обозначение S_{n+1} станет ясно позже.) Коэффициенты p_i разложения числителя $P(z)$ по многочленам Чебышева находятся из условия (1.3) умножением матрицы

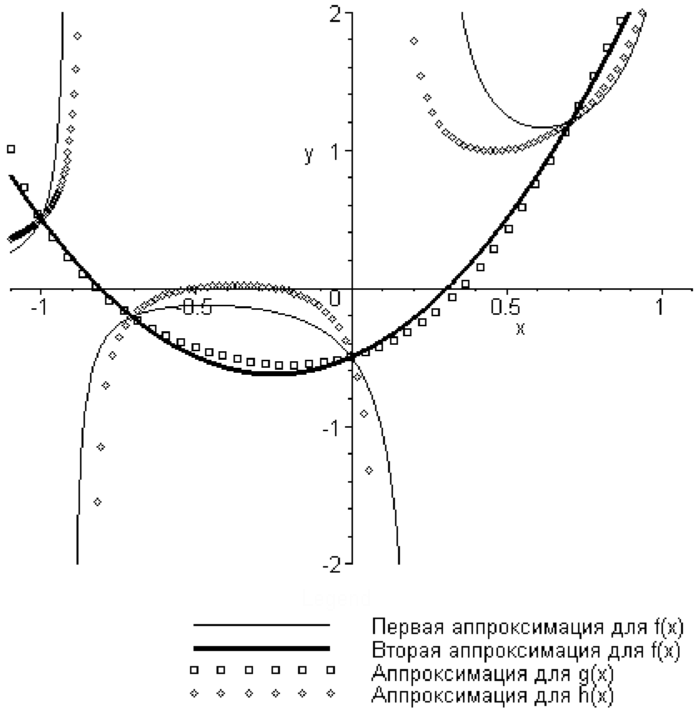
$$M = \begin{pmatrix} a_0+a_0 & a_1+a_1 & \dots & a_m+a_m \\ a_1+a_1 & a_0+a_2 & \dots & a_{m-1}+a_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+a_n & a_{n-1}+a_{n+1} & \dots & a_{|n-m|}+a_{n+m} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

на вектор, составленный из коэффициентов q_i.

Задача нахождения линейной аппроксимации Паде-Чебышева является некорректной по Адамару. Действительно, эта задача сводится к задаче нахождения ядра матрицы и потому является неустойчивой. Кроме того, ее решение находится, вообще говоря, неединственным образом, так как знаменатель $Q(z)$ находится неединственным образом. Это приводит к тому, что при малых возмущениях $f(z)$ при нахождении знаменателя аппроксимации мы можем "перескочить" на знаменатель другой аппроксимации Паде-Чебышева и, соответственно, получить другую аппроксимацию. (Отметим, что для классических аппроксимаций Паде неединственность знаменателя также имеет место, но это не вызывает неединственности самой аппроксимации Паде.) Следующий пример и демонстрирует неустойчивость решения задачи линейной аппроксимации Паде-Чебышева, проистекающую из ее неединственности.

Пример. Найдем линейную аппроксимацию Паде-Чебышева типа $(2,3)$ для функции, разложение по $T_k(x)$ которой имеет вид $f(x)=\frac{1}{2}T_0(x)+T_1(x)+T_2(x)+T_6(x)+T_7(x)+T_8(x)$. (Мы делаем это с помощью написанной нами в пакете Maple6 процедуры.)

Как оказывается, в данном случае решение этой задачи неединственно и мы имеем две различные аппроксимации, графики которых представлены ниже на рисунке. На этом же рисунке представлены линейные аппроксимации Паде-Чебышева для функции $g(x) = \frac{1.0001}{2}T_0(x) + 0.9999T_1(x) + 1.00001T_2(x) + 0.00001T_4(x) +$ $0.00001T_5(x) + 1.00001T_6(x) +$ $0.9999T_7(x) + 0.9999T_8(x)$ и функции $h(x) = \frac{0.9999}{2}T_0(x) +$ $0.9999T_1(x) +$ $1.00001T_2(x) -$ $0.00001T_4(x) -$ $0.0001T_5(x) + 1.00001T_6(x) +$ $0.9999T_7(x) + 0.9999T_8(x)$. Эти функции, очевидно, являются малыми возмущениями функции $f(x)$. Однако для каждой из них ядро матрицы S_{n+1} оказывается одномерным и линейная аппроксимация – единственной.



Из рисунка видно, что линейная аппроксимация Паде-Чебышева для функции $g(x)$ близка ко второй линейной аппроксимации Паде-Чебышева для $f(x)$, а линейная аппроксимация Паде-Чебышева для функции $h(x)$ близка к первой аппроксимации для $f(x)$.

Итак, при малых возмущениях исходной функции мы получаем сильно отличающиеся линейные аппроксимации Паде-Чебышева. Это и показывает неустойчивость решения данной задачи. Приведенный пример показывает также, что перед рассмотрением вопроса устойчивости аппроксимаций, естественно сначала попытаться разобраться с их неединственностью.

Цель данной работы – выяснить причины неединственности линейной аппроксимации Паде-Чебышева и найти условия, при которых решение данной задачи будет единственно и устойчиво. То, что оно всегда существует, мы уже отмечали ранее.

2. Параметризация числителя и знаменателя линейной аппроксимации Паде-Чебышева

Причины неединственности линейной аппроксимации Паде-Чебышева становятся ясными после изучения структуры множества знаменателей. В свою очередь, эта задача приводится к изучению структуры ядра теплиц-плюс-ганкелевых матриц. Используемый нами подход основан на понятиях индексов и существенных многочленов и является обобщением метода статьи [1].

Чтобы изучить структуру ядра матрицы S_{n+1}, включим ее в семейство матриц

$$S_k = \|a_{i-j+k} + a_{n+1+i+j}\|_{\substack{i=0,1,\dots,n+m-k \\ j=0,1,\dots,k-n+m-1}}, \quad n-m+1 \le k \le n+m,$$

и изучим структуру ядер матриц S_k.

Матрицы S_k "порождены" последовательность чисел $a_{n-m+1}^{n+2m} \equiv \{a_{n-m+1}, \dots, a_{n+2m}\}$, которые мы будем называть $T+H$ *последовательностью.* Иногда, чтобы указать, что S_k порождены конкретной $T+H$ последовательностью, мы также будем использовать обозначение $S_k(a_{n-m+1}^{n+2m})$. Формула (1.3) показывает, что для нахождения и числителя и знаменателя линейной аппроксимации Паде-Чебышева требуется последовательность a_0^{n+2m}.

Для удобства перейдем от пространств $\ker S_k$ к изоморфным пространствам $\mathcal{N}_k$ производящих векторных многочленов.

Для описания структуры ядра теплиц-плюс-ганкелевых матриц нам предпочтительнее использовать производящие векторные многочлены по z^k, то есть вектору $(r_0\ r_1\ \dots\ r_{k-n+m-1})^T$ из ядра матрицы S_k поставить в соответствие многочлен $r_0 + r_1 z + \dots + r_{k-m+m-1} z^{k-m+m-1}$ из пространства $\mathcal{N}_k$.

Справедливо вложение $z\mathcal{N}_k + (z+1)\mathcal{N}_{k+1} \subseteq \mathcal{N}_{k+2}$ (см. [2]), в котором, за исключительными случаями, всегда стоит знак равенства. Номера k исключительных случаев мы называем *индексами* и обозначаем μ_i. Базис дополнения $\mathcal{H}_{\mu_i+2}$ пространства $z\mathcal{N}_{\mu_i} + (z+1)\mathcal{N}_{\mu_i+1}$ до $\mathcal{N}_{\mu_i+2}$ образуют так называемые *существенные многочлены.*

В этой статье мы ограничиваемся только регулярным случаем $T+H$ последовательности, когда матрицы S_{n-m+1}, S_{n-m+2}, S_{n+m-1}, S_{n+m} имеют полный ранг. В таком случае мы имеем четыре индекса $\mu_1 \le \dots \le \mu_4$, сумма которых равна $4n+4$, и четыре существенных многочлена $R_1, \dots, R_4$, с помощью которых можно описать структуру ядер матриц из семейства S_k (см. [3]).

Элементы базиса пространств $\mathcal{N}_k$ могут быть записаны с помощью производящих многочленов по переменной z^k. Однако в задаче нахождения линейных аппроксимаций Паде-Чебышева (для описания структуры множества ее знаменателей и числителей) удобнее использовать производящие функции по многочленам Чебышева: для вектора $(r_0\ r_1\ \dots\ r_{k-n+m-1})^T$ эта производящая функция имеет вид $r_0 T_0(z) + r_1 T_1(z) + \dots + r_{k-n+m-1} T_{k-n+m-1}(z)$.

Производящие функции по T_k для элементов базиса $\ker S_{k+1}$ имеют вид (см. [3]):

$$\left\{ T_{[\frac{k-\mu_j}{2}]}(z) Q_{[\frac{k-\mu_j}{2}]}(z),\ \ T_{[\frac{k-\mu_j}{2}]-1}(z) Q_{[\frac{k-\mu_j}{2}]}(z), \dots, T_1(z) Q_{[\frac{k-\mu_j}{2}]}(z),\ \ Q_{[\frac{k-\mu_j}{2}]}(z) \right\}_{j=1}^{i}. \tag{2.1}$$

Отсюда легко следует [3], что знаменатель $Q(z)$ линейной аппроксимации Паде-Чебышева представляется в виде

$$Q(z) = q_1(z) Q_{[\frac{n-\mu_1}{2}]}(z) + q_2(z) Q_{[\frac{n-\mu_2}{2}]}(z) + q_3(z) Q_{[\frac{n-\mu_3}{2}]}(z). \tag{2.2}$$

Здесь

$$Q_{[\frac{n-\mu_j}{2}]}(z) = \sum_{i=0}^{m-n+\mu_j} R_i \left(T_{i+[\frac{n-\mu_j}{2}]}(z) + T_{i+[\frac{n-\mu_j+1}{2}]}(z) \right), \tag{2.3}$$

R_i-коэффициенты вектора из ядра S_{μ_j+1}, образующего соответствующий существенный многочлен. Введены также обозначения $q_1(z) = \sum_{i=0}^{[\frac{n-\mu_1}{2}]} \alpha_i T_i(z)$, $q_2(z) = \sum_{i=0}^{[\frac{n-\mu_2}{2}]} \beta_i T_i(z)$,

$q_3(z) = \sum_{i=0}^{[\frac{n-\mu_3}{2}]} \gamma_i T_i(z)$, где числа $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i-$ это произвольные параметры (коэффициенты разложения Q по элементам базиса (2.1) $\ker S_{n+1}$).

Пустую сумму, как обычно, считаем равной нулю.

Аналогично, числитель $P(z)$ линейной аппроксимации Паде-Чебышева представляется в виде

$$P(z) = q_1(z) P_{[\frac{n-\mu_1}{2}]}(z) + q_2(z) P_{[\frac{n-\mu_2}{2}]}(z) + q_3(z) P_{[\frac{n-\mu_3}{2}]}(z), \tag{2.4}$$

где $P_{[\frac{n-\mu_j}{2}]}(z)-$ числитель аппроксимации, знаменателем которой является $Q_{[\frac{n-\mu_j}{2}]}(z)$, R_i- коэффициенты вектора из $\ker S_{\mu_j+1}$, образующего соответствующий существенный многочлен, а многочлены $q_1(z), q_2(z), q_3(z)$ те же, что и в представлении знаменателя (4.2).

Формулы (4.2), (4.1) и дают параметризацию множества знаменателей и числителей аппроксимации Паде-Чебышева. Заметим, что для классических аппроксимаций Паде аналогичное представление числителей и знаменателей содержит не три слагаемых, как в (4.2), (4.1), а только одно.

3. Достаточное условие единственности линейной аппроксимации Паде-Чебышева

Из предыдущего пункта мы знаем, что числитель и знаменатель линейной аппроксимации Паде-Чебышева представляются в виде суммы трех слагаемых. Это и является причиной ее неединственности. Установим достаточное условие единственности линейной аппроксимации Паде-Чебышева.

Для этого выделим случай $\mu_1 \le n < \mu_2$, когда последние две суммы в (4.2), (4.1) будут пустыми. Тогда представление числителя и знаменателя содержит только одно слагаемое и линейная аппроксимация Паде-Чебышева равна

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P_{[\frac{n-\mu_1}{2}]}(z) \sum_{i=0}^{[\frac{n-\mu_1}{2}]} \alpha_i T_i(z)}{Q_{[\frac{n-\mu_1}{2}]}(z) \sum_{i=0}^{[\frac{n-\mu_1}{2}]} \alpha_i T_i(z)} = \frac{P_{[\frac{n-\mu_1}{2}]}(z)}{Q_{[\frac{n-\mu_1}{2}]}(z)},$$

т.е. определяется единственным образом.

Итак, мы получили следующее достаточное условие единственности.

Теорема 3.1. *[3] Если индексы последовательности a_{n-m+1}^{n+2m} удовлетворяют условию $\mu_1 \le n < \mu_2$, то решение задачи линейной аппроксимации Паде-Чебышева единственно.*

Замечание 3.1. *Нетрудно проверить, что следующие условия равносильны: матрица $S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$ имеет полный ранг и индексы последовательности a_{n-m+1}^{n+2m} принимают значения $\mu_1 = n,\ \mu_2 = \mu_3 = n+1,\ \mu_4 = n+2$. Таким образом, условие $\mu_1 \le n < \mu_2$ выполняется в случае общего положения (матрица S_{n+1} имеет полный ранг). Это означает, что, как правило, линейная аппроксимация Паде-Чебышева оказывается единственной.*

4. Устойчивость

В случае аппроксимаций Паде и связанной с ними задачи о структуре ядра теплицевых матриц необходимым и достаточным условием устойчивости индексов μ_1, μ_2 оказывается условие $\mu_2 - \mu_1 \le 1$ [4].

В этом параграфе мы собираемся показать, что условие $\mu_4 - \mu_1 \le 2$ является достаточным для устойчивости индексов $T+H$ последовательности. Точнее, мы собираемся доказать, что справедлива следующая

Теорема 4.1. *Если индексы последовательности a_{n-m+1}^{n+2m} удовлетворяют условию*

$$\mu_4 - \mu_1 \leq 2,$$

то решение задачи линейной аппроксимации Паде-Чебышева существует, единственно и устойчиво.

Скорее всего, это условие является и необходимым. Мы в этой статье ограничимся пока только доказательством достаточности.

Утверждение теоремы о существовании решения этой задачи не вызывает сомнений и уже отмечалось ранее (см. замечание 1.1).

Прежде, чем перейти к доказательству остальной части теоремы, приведем несколько лемм и предложений, которые будут нам полезны.

Всюду далее для матриц из $\mathbb{C}^{k\times l}$ мы будем использовать максимальную столбцовую норму:

$$\|A\| = \max_{1\leq j\leq l}\sum_{i=1}^{k}|A_{ij}|$$

Для числовой последовательности $a_M^N = \{a_M, a_{M+1}, \ldots, a_N\}$ введем

$$\|a_M^N\| = \sum_{i=M}^{N}|a_i|.$$

Эту же норму будем использовать для производящего многочлена как по z^k, так и по $T_k(z)$ этой последовательности.

Предложение 4.1. *Если для индексов $T+H$ последовательности a_{n-m+1}^{n+2m}, возникающей в задаче нахождения знаменателя линейной аппроксимации Паде-Чебышева типа (n, m) выполняется условие*

$$\mu_4 - \mu_1 \leq 2, \tag{4.1}$$

то индексы являются устойчивыми.

Пусть условие (4.1) выполнено. Тогда на самом деле $\mu_4 - \mu_1 = 2$, и индексы принимают значения $\mu_1 = n, \mu_2 = \mu_3 = n+1, \mu_4 = n+2$.

Доказательство. Пусть для индексов $T+H$ последовательности, возникающей в задаче нахождения знаменателя линейной аппроксимации Паде-Чебышева типа (n, m) выполняется условие $\mu_4 - \mu_1 \leq 2$.

Очевидно, что $\mu_4 - \mu_1 \neq 0$. Действительно, если бы это условие выполнялось, то все индексы были бы равны $n+1$. Это, в частности, означает, что $\dim\ker S_{n+1} = 0$. С другой стороны, $\dim\ker S_{n+1} = m+1-\operatorname{rank} S_{n+1}$. Тогда $\operatorname{rank} S_{n+1} = m+1$, что невозможно, так как у этой матрицы всего m строк.

Значит, остаются возможными случаи $\mu_4 - \mu_1 = 1$ и $\mu_4 - \mu_1 = 2$.

Рассмотрим случай $\mu_4 - \mu_1 = 1$. A priori возможны следующие значения индексов:

1. $\mu, \mu, \mu, \mu+1$,
2. $\mu, \mu, \mu+1, \mu+1$,
3. $\mu, \mu+1, \mu+1, \mu+1$.

Сумма всех индексов должна быть равна $4n+4$. Подсчитывая сумму индексов в каждом случае, убеждаемся, что это невозможно. Значит, остается лишь случай $\mu_4 - \mu_1 = 2$.

В этом случае a priori возможны следующие значения индексов:

1. $\mu, \mu, \mu, \mu + 2$,
2. $\mu, \mu, \mu + 1, \mu + 2$,
3. $\mu, \mu, \mu + 2, \mu + 2$,
4. $\mu, \mu + 1, \mu + 1, \mu + 2$,
5. $\mu, \mu + 1, \mu + 2, \mu + 2$,
6. $\mu, \mu + 2, \mu + 2, \mu + 2$.

Из выражения для суммы индексов сразу следует, что случаи 1, 2, 5, 6 невозможны. Случаи 3 и 4 теоретически остаются возможными для значения $\mu = n$. Однако случай 3 все же не осуществляется.

Действительно, в этом случае индексы принимают значения $n, n, n + 2, n + 2$. Это, в частности, означает, что $\dim\ker S_{n+2} = 2$. Тогда ранг этой матрицы равен m. Но это невозможно, так как матрица S_{n+2} имеет размеры $(m - 1) \times (m + 2)$.

Таким образом, если $\mu_4 - \mu_1 \leq 2$, то индексы принимают значения $n, n+1, n+1, n+2$. Докажем, что такие индексы будут устойчивыми.

Из определения индексов следует, что матрица S_n обратима слева и S_{n+2} обратима справа.

Пусть $\tilde{f}(z)$ малое возмущение некоторой функции $f(z)$. Пусть $\tilde{a}_0^{n+2m}$ – возмущенная a_0^{n+2m} последовательность, возникающая в задаче линейной аппроксимации Паде-Чебышева типа (n, m) этой возмущенной функции. Тогда матрица $S_n(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$ достаточно близка по норме к $S_n \equiv S_n(a_{n-m+1}^{n+2m})$, а матрица $S_{n+2}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$ к $S_{n+2}(a_{n-m+1}^{n+2m})$.

Тогда, в силу устойчивости свойства односторонней обратимости при малых возмущениях, матрица $S_n(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$ обратима слева и $S_{n+2}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$ обратима справа. Значит, индексы возмущенной последовательности:

$$n \leq \tilde{\mu}_1 \leq \tilde{\mu}_2 \leq \tilde{\mu}_3 \leq \tilde{\mu}_4 \leq n + 2.$$

Докажем, что $\tilde{\mu}_1 = n, \tilde{\mu}_4 = n+2$. Из выражения для суммы индексов следует, что $\tilde{\mu}_1 \leq n+1$. Предположим, $\tilde{\mu}_1 = n + 1$, тогда $\tilde{\mu}_2 = \tilde{\mu}_3 = \tilde{\mu}_4 = n + 1$, что невозможно, следовательно, $\tilde{\mu}_1 = n$. Аналогично, $\tilde{\mu}_4 = n + 2$. Тогда $\tilde{\mu}_4 - \tilde{\mu}_1 \leq 2$ и, по ранее доказанной части теоремы, индексы возмущенной последовательности равны n, $n + 1$, $n + 1$, $n + 2$.

Итак, мы показали, что в случае $\mu_4 - \mu_1 \leq 2$ индексы принимают значения n, $n + 1$, $n + 1$, $n + 2$ и являются устойчивыми. Предложение доказано.

■

Из только что доказанного предложения 4.1 и теоремы 3.1 сразу получается

Следствие 4.1. *Если $\mu_4 - \mu_1 \leq 2$, то линейная аппроксимация Паде-Чебышева определяется единственным образом.*

Утверждение теоремы 4.1 об единственности решения задачи линейной аппрокимации Паде-Чебышева также доказано. Перейдем к вопросу ее устойчивости.

Пусть $\tilde{f}(z)$ малое возмущение некоторой функции $f(z)$. Тогда последовательность $\tilde{a}_0^{n+2m}$, составленная из коэффициентов разложения в ряд по многочленам Чебышева функции $\tilde{f}(z)$, будет являться возмущением последовательности a_0^{n+2m}.

Матрица $S_{n+1}(\tilde{a}_{n+m-1}^{n+2m})$, как и матрица $S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$ также имеет полный ранг и одномерное ядро (в силу устойчивости свойства односторонней обратимости при малых возмущениях).

Как уже отмечалось в предложении 4.1, индексы устойчивы и, следовательно, совпадают для возмущенной и невозмущенной $T + H$ последовательности. Значит, решение задачи линейной аппроксимации типа (n, m) для функции $\tilde{f}(z)$ также существует и единственно.

Докажем устойчивость задачи линейной аппроксимации Паде-Чебышева, т.е., что при достаточно малых возмущениях аппроксимируемой функции $f(z)$ линейные аппроксимации $\frac{P}{Q}$ и $\frac{\tilde{P}}{\tilde{Q}}$ будут близки. Для этого докажем сначала устойчивость знаменателя аппроксимации Паде-Чебышева, затем ее числителя, и, наконец, устойчивость и самой аппроксимации.

Нам потребуются две леммы.

Лемма 4.1. [см., например, [5]] *Пусть A – обратимый справа оператор, действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2. Пусть $A^\dagger$ – любой правосторонний обратный к A и $P_A = I - A^\dagger A$ – проектор на $\ker A$.*

Тогда для любого оператора B, удовлетворяющего неравенству

$$\|A - B\| < \frac{1}{2\|A^\dagger\|},$$

справедливо:

1. *B – обратимый справа оператор и $B^\dagger = C^{-1}A^\dagger$ – правый обратный к B. Здесь $C = I - A^\dagger(A - B)$, $C^{-1} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(A^\dagger(A - B)\right)^j$.*

2. *Для проектора $P_B = I - B^\dagger B = C^{-1}P_A C$ на $\ker B$ выполняется следующее неравенство*
$$\|P_A - P_B\| < \mathrm{const}\, \|A - B\|.$$

Лемма 4.2. *Пусть a_{n-m+1}^{n+2m} – некоторая $T + H$ последовательность с индексами $n, n+1, n+1, n+2$. Тогда первый существенный многочлен $R_1(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_m z^m$ этой последовательности имеет отличный от нуля коэффициент α_d тогда и только тогда, когда матрица $S_{n+1,d+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$, полученная из $S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$ вычеркиванием $(d+1)$-го столбца, обратима. Пусть это условие выполнено. Пронормируем $R_1(z)$ таким образом, чтобы $\alpha_d = 1$. Полученный многочлен будем называть d-нормированным. Тогда матрица*

$$\mathcal{P}_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m}) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \alpha_0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \alpha_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \alpha_m & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

где отличен от нуля лишь столбец с номером $d+1$, является матрицей проектора на $\ker S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$. При этом

$$\mathcal{P}_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m}) = I_{m+1} - S_{n+1}^\dagger(a_{n-m+1}^{n+2m}) S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m}).$$

Здесь $S_{n+1}^\dagger(a_{n-m+1}^{n+2m})$ – правостронняя обратная к $S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$, полученная из матрицы $S_{n+1,d+1}^{-1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$ добавлением нулевой строки на место с номером $d+1$.

Доказательство этой леммы незначительно отличается от доказательства аналогичного факта, приведенного в [6], и потому опущено.

Предложение 4.2. *Если для индексов $T + H$ последовательности a_{n-m+1}^{n+2m}, возникающей в задаче нахождения знаменателя линейной аппроксимации Паде-Чебышева типа (n, m) выполняется условие $\mu_4 - \mu_1 \le 2$, то знаменатель линейной аппроксимации Паде-Чебышева является устойчивым.*

Доказательство. Докажем вначале близость первых существенных многочленов $R_1(z)$ и $\tilde{R}_1(z)$ последовательностей a_{n-m+1}^{n+2m} и $\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m}$.

По d-нормированному первому существенному многочлену $R_1(z)$ составим проектор $\mathcal{P}_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$ на ядро матрицы $S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$. В силу близости a_0^{n+2m} и $\tilde{a}_0^{n+2m}$ последовательностей матрицы $S_{n+1,d+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$, $S_{n+1,d+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$ из леммы 4.2 будут близки, значит матрица $S_{n+1,d+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$ будет также обратима и, следовательно, многочлен $\tilde{R}_1(z)$ будет также иметь ненулевой коэффициент $\tilde{\alpha}_d$.

Применим теперь лемму 4.1. Положим $A = S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$, $B = S_{n+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$ и $A^\dagger = S_{n+1}^\dagger(a_{n-m+1}^{n+2m})$. Тогда $P_A = \mathcal{P}_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$.

Очевидно, что $\|S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})\| \le 2\|a_{n-m+1}^{n+2m}\| \le 2\|a_0^{n+2m}\|$.

Тогда $\|S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m} - \tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})\| \le 2\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\|$ и при достаточно малых возмущениях условие $\|A - B\| < \frac{1}{2\|A^\dagger\|}$ леммы 4.1 выполнено. Докажем, что проектор P_B, построенный в этой лемме, совпадает с $\mathcal{P}_{n+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$. Для этого уточним структуру матриц C и C^{-1}.

Так как

$$C = I_{m+1} - S_{n+1}^\dagger(a_{n-m+1}^{n+2m})S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m} - \tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m}),$$

то, поскольку $\left[S_{n+1}^\dagger(a_{n-m+1}^{n+2m})\right]_{d+1}$ – нулевая строка, получаем, что $(d+1)$-я строка матрицы C имеет вид

$$[C]_{d+1} = \left(0\ldots0 \overset{d+1}{1} 0\ldots0\right).$$

Ясно, что тот же вид имеет $(d+1)$-я строка матрицы

$$C^{-1} = I_{m+1} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(S_{n+1}^\dagger(a_{n-m+1}^{n+2m})S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m} - \tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})\right)^j.$$

Но тогда

$$P_B = C^{-1}\mathcal{P}_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})C = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & * & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & * & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь только $(d+1)$-й столбец является ненулевым и 1 стоит в $(d+1)$-й строке.

Так как P_B – проектор на $\ker S_{n+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$, то его $(d+1)$-й столбец принадлежит $\ker S_{n+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$, то есть совпадает с d-нормированным многочленом $\tilde{R}_1(z)$. Это означает, что $P_B = \mathcal{P}_{n+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$.

Тогда получаем, что

$$\|R_1(z) - \tilde{R}_1(z)\| = \|\mathcal{P}_{n+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m}) - \mathcal{P}_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})\| <$$

$$< \mathrm{const}\|S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m}) - S_{n+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})\| \le \mathrm{const}\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\|.$$

Близость первых существенных многочленов последовательностей a_{n-m+1}^{n+2m} и $\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m}$ доказана. Построим по многочленам $R_1(z)$, $\tilde{R}_1(z)$, а точнее по их коэффициентам R_{1i}, $\tilde{R}_{1i}$ (см. (2.3)), знаменатели $Q(z) \equiv Q_0(z)$ и $\tilde{Q}(z) \equiv \tilde{Q}_0(z)$. Покажем, что и они будут близки.

Действительно,

$$\|Q(z) - \tilde{Q}(z)\| = \left\|\sum_{i=0}^{m} 2\left(R_{1i} - \tilde{R}_{1i}\right)T_i(z)\right\| = 2\|R_1(z) - \tilde{R}_1(z)\| \le \mathrm{const}\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\|. \quad (4.3)$$

Предложение доказано. ■

Предложение 4.3. *Если для индексов $T+H$ последовательности a_{n-m+1}^{n+2m}, возникающей в задаче нахождения знаменателя линейной аппроксимации Паде-Чебышева типа (n,m) выполняется условие $\mu_4-\mu_1\le 2$, то числитель линейной аппроксимации Паде-Чебышева является устойчивым.*

Доказательство.

Числители $P,\tilde P$ получаются с помощью умножения векторов, составленных из коэффициентов знаменателей $Q,\tilde Q$ на матрицы $M,\tilde M$ (см. (1.4)). Легко видеть, что $\|M-\tilde M\|\le 3\|a_0^{n+2m}-\tilde a_0^{n+2m}\|$.

Тогда

$$\|P-\tilde P\|=\|MQ-\tilde M\tilde Q\|=\|MQ-M\tilde Q+M\tilde Q-\tilde M\tilde Q\|\le\|M\|\|Q-\tilde Q\|+\|\tilde Q\|\|M-\tilde M\|.$$

В силу (4.3) имеем

$$\|\tilde Q\|\le\|Q\|+\|\tilde Q-Q\|\le\|Q\|+\mathrm{const}\|a_0^{n+2m}-\tilde a_0^{n+2m}\|$$

и, при достаточно малом возмущении последовательности a_0^{n+2m}, получаем $\|\tilde Q\|<\frac{3}{2}\|Q\|$.

Тогда

$$\|P-\tilde P\|\le\mathrm{const}\|\mathrm{M}\|\|\mathrm{a}_0^{\mathrm{n+2m}}-\tilde{\mathrm{a}}_0^{\mathrm{n+2m}}\|+\frac{9}{2}\|\mathrm{Q}\|\|\mathrm{a}_0^{\mathrm{n+2m}}-\tilde{\mathrm{a}}_0^{\mathrm{n+2m}}\|=\mathrm{const}\|\mathrm{a}_0^{\mathrm{n+2m}}-\tilde{\mathrm{a}}_0^{\mathrm{n+2m}}\|.$$

■

Теперь мы можем доказать и устойчивость самих аппроксимаций.

Оценим

$$\|\frac{P}{Q}-\frac{\tilde P}{\tilde Q}\|=\|\frac{P\tilde Q-Q\tilde P}{Q\tilde Q}\|=\|\frac{P\tilde Q-PQ+PQ-Q\tilde P}{Q\tilde Q}\|\le\frac{\|P\|}{\|Q\|\|\tilde Q\|}\|\tilde Q-Q\|+\frac{\|P-\tilde P\|}{\|\tilde Q\|}.$$

В силу (4.3), при достаточно малых возмущениях последовательности a_0^{n+2m}, имеем

$$\frac{1}{\|\tilde Q\|}\le\frac{1}{\|Q\|-\|\tilde Q-Q\|}\le\frac{1}{\|Q\|-\mathrm{const}\|a_0^{n+2m}-\tilde a_0^{n+2m}\|}<\frac{2}{\|Q\|}.$$

Тогда

$$\|\frac{P}{Q}-\frac{\tilde P}{\tilde Q}\|<\frac{2\|P\|}{\|Q\|^2}\|\tilde Q-Q\|+\frac{2\|P-\tilde P\|}{\|Q\|}\le\mathrm{const}\|\mathrm{a}_0^{\mathrm{n+2m}}-\tilde{\mathrm{a}}_0^{\mathrm{n+2m}}\|.$$

Теперь теорема 4.1 полностью доказана.

Заключение

В статье получено достаточное условие существования, единственности и устойчивости решения задачи линейной аппроксимации Паде-Чебышева в терминах существенных индексов $T+H$ последовательности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал, грант N 04-01-96006. О.Л. Ибряева также благодарит за финансовую поддержку Министерство образования и Правительство Челябинской области, грант №003.01.06-04.БМ.

Литература

1. Adukov V.M., Generalized Inversion of Block Toeplitz Matrices // Linear Algebra and Its Applications. 274:85-124, 1998.

2. Адуков В.М., Ибряева О.Л., О структуре ядра теплиц-плюс-ганкелевых матриц // Вестник ЮУрГУ. 2001. №7. С. 3-12.

3. Ибряева О.Л., Достаточное условие единственности линейной аппроксимации Паде-Чебышева // Известия Челябинского научного центра. вып. 4(17), 2002.

4. Heinig G., Jankowski P., Kernel structure of Block Hankel and Toeplitz Matrices and Partial Realization // Linear Algebra and Its Applications. 175:1-30, 1992.

5. Litvinchuk G.S., Spitkovski I.M., Factorization of measurable matrix functions // Berlin. Akademie-Verlag, 1987. 372p.

6. Adukov V.M., The uniform convergence of subsequences of the last intermediate row of the Pade table // J. Approx. Theory. 1997. V. 88. P. 354-369.