Об единственности и устойчивости решения задачи линейной аппроксимации Паде-Чебышева

В.М. Адуков, О.Л. Ибряева
Челябинск, Южно-Уральский государственный университет
e-mail: avm@susu.ac.ru, oli@susu.ac.ru

Пусть функция $f(z)$ разложена в ряд по многочленам Чебышева $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i T_i(z) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 T_1(z) + a_2 T_2(z) + \dots$.

Линейной аппроксимацией Паде-Чебышева типа (n, m) функции $f(z)$ называется функция $R_{n,m}(z) = \dfrac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)}$, где $P_{n,m}, Q_{n,m}$ – многочлены, такие что $\deg P_{n,m}(z) \le n$, $\deg Q_{n,m}(z) \le m$ и выполняется соотношение $Q_{n,m}(z)f(z) - P_{n,m}(z) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} c_k T_k(z)$.

Задача нахождения линейной аппроксимации Паде-Чебышева сводится к задаче нахождения ее знаменателя $Q_{n,m}$, которая, в свою очередь, приводит к задаче нахождения ядра теплиц-плюс-ганкелевой матрицы. Нетрудно показать, что решение задачи аппроксимации Паде-Чебышева всегда существует. Знаменатель аппроксимации находится неустойчивым и, вообще говоря, неединственным образом. Это приводит к неединственности в общем случае аппроксимации Паде-Чебышева данного типа. (Отметим, что для классических аппроксимаций Паде неединственность знаменателя также имеет место, но это не вызывает неединственности самой аппроксимации Паде.) Вследствии этой неединственности при малых возмущениях знаменателя одной аппроксимации мы можем получить знаменатель другой аппроксимации. Это подтверждается численными экспериментами. Таким образом, задача нахождения линейных аппроксимаций Паде-Чебышева является некорректной по Адамару задачей. Цель работы – выяснить причины неединственности и найти условия при которых решение задачи линейной аппроксимации Паде-Чебышева будет единственно и устойчиво.

Причины неединственности становятся ясными после изучения структуры ядра теплиц-плюс-ганкелевых матриц. Используемый нами подход основан на понятиях индексов и существенных многочленов и является обобщением метода статьи [1].

Вектор, составленный из коэффициентов разложения знаменателя аппроксимации по многочленам Чебышева, принадлежит ядру теплиц-плюс-ганкелевой матрицы $S_{n+1} = \|a_{n+i-j+1} + a_{n+1+i+j}\|_{\substack{i=0,\ldots,m-1\\ j=0,\ldots,m}}$, где $a_{n-m+1},\ldots,a_{n+2m}$ – коэффициенты разложения аппроксимируемой функции по многочленам Чебышева.

Чтобы изучить структуру ядра этой матрицы, включим ее в семейство матриц $S_k = \|a_{i-j+k} + a_{n+1+i+j}\|_{\substack{i=0,1,\ldots,n+m-k\\ j=0,1,\ldots,k-n+m-1}}$, $n+m \le k \le n-m+1$. Для удобства перейдем от пространств $\ker S_k$ к изоморфным пространствам $\mathcal{N}_k$ производящих векторных многочленов. Справедливо вложение $t\mathcal{N}_k + (t+1)\mathcal{N}_{k+1} \subseteq \mathcal{N}_{k+2}$ (см. [2]), в котором, за исключительными случаями, всегда стоит знак равенства. Номера k исключительных случаев мы называем индексами и обозначаем μ_i. Базис дополнения $\mathcal{H}_{\mu_i+2}$ пространства $t\mathcal{N}_{\mu_i}+(t+1)\mathcal{N}_{\mu_i+1}$ до $\mathcal{N}_{\mu_i+2}$ образуют так называемые существенные многочлены. В случае общего положения мы имеем по четыре индекса $\mu_1,\ldots,\mu_4$ и существенных многочлена $R_1,\ldots,R_4$, с помощью которых можно описать структуру ядер матриц из семейства S_k (см. [3]). В случае $\mu_1 \le n < \mu_2$, ядро матрицы S_{n+1} может быть неодномерно, однако полностью определяется первым существенным многочленом R_1, он формирует знаменатель аппроксимации Паде, а, следовательно, и саму аппроксимацию. В этом случае справедлива

Теорема 1. *Если $\mu_1 \le n < \mu_2$, то решение задачи линейной аппроксимации Паде-Чебышева единственно.*

Если выполняется условие $\mu_1 = n,\ \mu_2 = \mu_3 = n+1,\ \mu_4 = n+2$, то индексы устойчивы при малом возмущении исходной функции $f(z)$. Оказывается, что в этом случае справедлива более сильное утверждение

Теорема 2. *Если $\mu_1 = n,\ \mu_2 = \mu_3 = n+1,\ \mu_4 = n+2$, то решение задачи линейной аппроксимации Паде-Чебышева существует, единственно и устойчиво.*

[1] *Adukov V.M.* Generalized Inversion of Block Toeplitz Matrices // Linear Algebra and Its Appications. 1998. V. 274. P. 85–124.

[2] *Адуков В.М., Ибряева О.Л.* О структуре ядра теплиц-плюс-ганкелевых матриц // Вестник ЮУрГУ. 2001. №7. С. 3–12.

[3] *Ибряева О.Л.* Достаточное условие единственности линейной аппроксимации Паде-Чебышева // Известия Челябинского научного центра. 2002. вып. 4(17). С. 1–5.